Giochi di Numeri

Gionata Massi*
IIS "Savoia Benincasa", Ancona

Alberto Cesaretti e Pamela Sanchini
Liceo Scientifico e Musicale "Einstein", Rimini

ITADINFO 2026 · Padova · 11/10/2026

[ITADINFO]

Piano della presentazione

1. Constesto, obiettivi, scelte metodologiche e strumenti
    1. Obiettivi generali e visione pedagogica
    2. Obiettivi didattici specifici (proposta CINI)
    3. Metodologia e mediatori
    4. Scheme *semplificato* e ambiente di valutazione
2. Articolazione del percorso
    1. Incontro 1: espressioni aritmetiche e valutazione
    2. Incontro 2: primitive linguistiche e ricorsione
    3. Incontro 3: struttura ricorsiva di espressioni e predicati
    4. Incontro 4: aritmetica ricorsiva
    5. Incontro 5: l'operazione misteriosa
3. Risultati didattici e valore formativo
    1. Limiti riscontrati e proposte di sviluppo
    2. Conclusioni

Constesto, obiettivi, scelte metodologiche e strumenti

> Il calcolatore era (ed è ancora) un nuovo e meraviglioso concetto filosofico e matematico. Il calcolatore è ancora più rivoluzionario come idea che come congegno pratico che modifica la società – e tutti sappiamo quanto abbia cambiato la nostra vita.
> Perché lo dico? Perché il calcolatore cambia l'epistemologia, modifica il significato del verbo «comprendere». A mio giudizio, si capisce qualcosa solo se si è capaci – noi, non altri! – di scriverne il programma. Altrimenti non si ha una vera comprensione, si crede soltanto di capire.
> – Gregory Chaitin, *Alla ricerca di Omega*, Adelphi Edizioni

Obiettivi generali e visione pedagogica

Dal "saper fare" al "saper far fare"

- **Formalizzazione algoritmica:** rendere esplicito il processo di valutazione
- **Modello di esecutore:** distinguere rigorosamente forma e valutazione
- **Struttura concettuale:** costruire una forma mentis fondata sulla *ricorsione strutturale*
- **Sistemi formali:** eliminare ogni ambiguità sintattica e semantica

Un linguaggio rigoroso

- Quale linguaggio di programmazione adottare?
  - > In questo periodo infatti lo studio... deve essere (o apparire ai discenti) disinteressato, non avere cioè scopi pratici immediati... deve essere formativo, anche se 'istruttivo', cioè ricco di nozioni concrete.
    > — A. Gramsci, *Quaderno 12*
  - ☑ **Scheme** con ambiente iniziale personalizzato

Obiettivi didattici specifici (proposta CINI)

Traguardi di competenza

- **T-S-1:** comprende la necessità di fare riferimento a un esecutore automatico per esprimere algoritmi in modo non ambiguo
- **T-S-2:** riconosce che un algoritmo risolve un problema nella sua generalità
- **T-S-3:** giustifica la correttezza di un algoritmo rispetto a tale generalità
- **T-S-6:** definisce, realizza e valida programmi che modellano processi familiari

Obiettivi di apprendimento operativi

- **O-S-P-2:** predire il risultato di un programma prima di farlo eseguire
- **O-S-P-3:** utilizzare condizioni che impiegano operatori logici
- **O-S-P-7:** scrivere semplici programmi in un linguaggio testuale rispettandone la sintassi
- **O-S-N-3:** identificare se e come i programmi possono essere modificati

Metodologia e mediatori

Metodologia didattica

- **Metodo dialogato:** domande e risposte su concetti e problemi
- **Esercizio formale e disciplinato:** fasi di apprendimento per imitazione e ripetizione alternate da esercizi e riflessioni

Riferimenti teorici e storici

- Dan Friedman (The Little Schemer: emergenza della ricorsione per ripetizione e schemi comuni
- Abelson & Sussman (SICP e Felleisen et al. (HtDP): scomposizione strutturale del dato, rappresentazioni
- Georges Cuisenaire: l'aritmetica manipolativa dei "numeri in colore"
- Giovanni Bosco: L'aritmetica ed il sistema metrico portati a semplicità per le classi elementari col confronto dei prezzi e delle misure antiche d'Italia in metrico-decimale. 1881

Scheme *semplificato* e ambiente di valutazione

Essenzialità sintattica: tre forme fondamentali

- `define` : associazione tra nomi e valori
- `lambda` : astrazione funzionale
- `cond` : espressione condizionale multi-ramo

Nessun costrutto imperativo accessorio (assegnamento di variabili, cicli): l'attenzione resta interamente focalizzata sulla struttura dei dati e delle funzioni.

Ambienti di sviluppo e visualizzazione

- WeScheme: interprete didattico eseguibile direttamente nel browser
- ProcessVisualizer: simulatore dei passi di riduzione per l'esecutore automatico

Articolazione del percorso

La progressione concettuale

- **Incontro 1: espressioni, mediatori iconici e linguaggio Scheme**
  - Espressioni numeriche con notazione infissa, atomi e espressioni composte, alberi sintattici, liste e modello di valutazione per sostituzione
- **Incontro 2: Condizionali e struttura ricorsiva**
  - La forma `cond`, identificazione rigorosa del caso base e del passo ricorsivo
- **Incontro 3: Procedure ricorsive su liste**
  - Algoritmi di riconoscimento (`lista-di-atomi?`), esplorazione e scomposizione `primo` / `resto`
- **Incontri 4: Procedure ricorsive sui numeri naturali**:
  - Applicazione del principio di induzione per la (ri-)costruzione dell'aritmetica
- **Incontro 5: Dalla forma al significato delle procedure ricorsive**
  - Esercizi per dare significato ai programmi

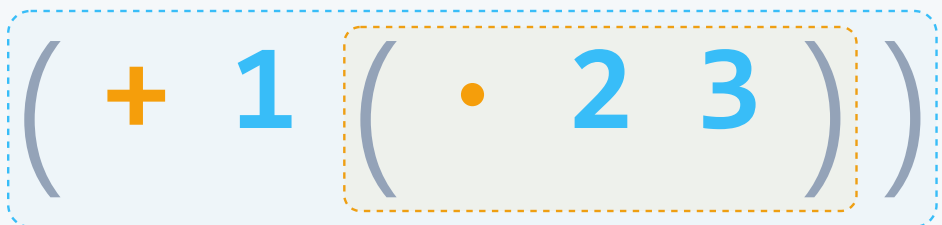
7

Incontro 1: dalle espressioni aritmetiche alla notazione prefissa

Rappresentazioni *isomorfe*

G Notazione prefissa Scheme `(+ 1 (· 2 3))`

a b c d e f g



Incontro 1: mediatori iconici e/o rappresentazioni

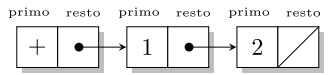
Molteplici linguaggi scritto/grafici per distinguere espressione e valutazione

Scrittura prefissa (s-exp)

$$(+\ 1\ 2)$$

Operatore anteposto agli argomenti

Struttura a lista



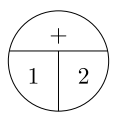
Coppie di puntatori primo/resto

Albero sintattico



Gerarchia di rami dall'operatore

Cerchio di valutazione



Operatore in alto, argomenti in basso

A questi quattro mediatori per le espressioni si affianca il supporto manipolativo dei **numeri in colore (regoli Cuisenaire)** per la costruzione delle operazioni aritmetiche sui naturali.

Regole di valutazione

- I valori dei numerali sono i numeri da essi rappresentati;
- i valori degli operatori sono le sequenze di istruzioni che eseguono le corrispondenti operazioni;

Per valutare una espressione:

1. Valutare le sottoespressioni.
2. Applicare la procedura risultante dalla valutazione della sottoespressione più a sinistra (l'operatore) agli argomenti ottenuti dalla valutazione delle altre sottoespressioni (gli operandi).

7. Riduzione finale: (+ 1 6) → 7 `7`



Incontro 2: primitive linguistiche e ricorsione

Termini

- *variabile*
- *creazione di procedura*
- *applicazione di procedura*

Forme sintattiche e loro semantica

- `define`, `cond` e `lambda`

Primitive per la manipolazione di liste e s-exp

- **Costante terminale:** `lista-vuota`
- **Costanti logiche:** `#f`, `#t`
- **Predicati di tipo:** `atomo?`, `lista?`, `lista-vuota?`, `uguale?`
- **Selettori e costruttori:** `primo`, `resto`, `anteponi`, `lista`

Incontro 3: struttura ricorsiva di espressioni e predicati

Caso base e passo induttivo

Lunghezza

```
(define lunghezza
  (lambda (lst)
    (cond
      [(lista-vuota? lst) 0]
      [else (+ 1 (lunghezza (resto lst)))])))
```

Lista di atomi

```
(define lista-di-atomi?
  (lambda (lst)
    (cond
      [(lista-vuota? lst) #t]
      [(atomo? (primo lst)) (lista-di-atomi? (resto lst))]
      [else #f])))
```

Pari

```
(define pari?
  (lambda (n)
    (cond
      [(= n 0) #t]
      [(= n 1) #f]
      [else (pari? (- n 2))])))
```

Incontro 4: aritmetica ricorsiva

Primitive sui naturali

- `zero?` : verifica del caso base ($n = 0$)
- `s` : funzione successore unitario ($n + 1$)
- `p` : funzione predecessore unitario ($n - 1$)

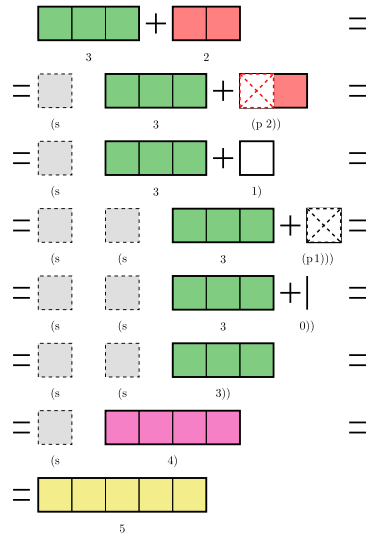
Costruzione ricorsiva dell'addizione

Tre livelli isomorfi per apprendere come calcolare (addizione 3 2)

```
(define addizione
  (lambda (a b)
    (cond
      [(zero? b) a]
      [else (s (addizione a (p b)))])))
```

- **Piano manipolativo:** i numeri in colore (regoli Cuisenaire)
- **Piano simbolico:** riscrittura delle espressioni alla lavagna
- **Piano grafico:** accumulo e contrazione dei successori differiti

Numeri in colore: (addizione 3 2)



Riduzione del secondo argomento e accumulo dei successori

Incontro 5: l'operazione misteriosa

Analisi semantica di un listato oscurato

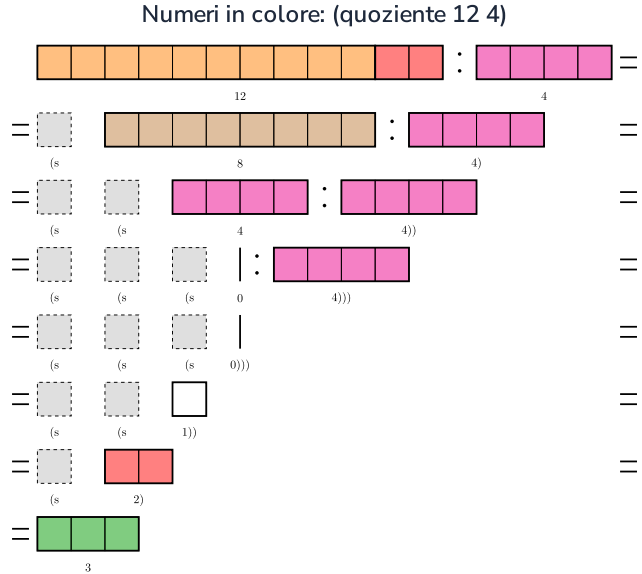
- **Strategia didattica:** presentazione con nome oscurato `operazione-misteriosa`
- **Compito richiesto:** simulazione mentale di `(operazione-misteriosa 12 4)`

Riscoperta della divisione euclidea

Sottrazione ripetuta e astrazione funzionale

```
(define quoziente
  (lambda (a b)
    (cond
      [(minore? a b) 0]
      [else (s (quoziente (sottrazione a b) b))])))
```

- **Sottrazione ripetuta:** riscoperta come decrementi a blocchi di 4



Sottrazioni successive di 4 fino al caso base

Risultati didattici e valore formativo

Competenze concettuali e metacognitive

- **Esecuzione vs interpretazione:** gli studenti imparano a leggere i programmi come oggetti di studio e a predire i risultati
- **Lessico disciplinare rigoroso:** assimilazione consapevole dei termini *espressione*, *procedura*, *caso base*, *argomento*, *parametro*
- **Evoluzione cognitiva:** la ricorsione, da iniziale "artificio sintattico", diventa **metodo generale di risoluzione dei problemi**

Impatto pedagogico

- Fattibilità nel primo biennio di un'Informatica **fortemente disciplinare**, capace di promuovere il ragionamento **formalmente corretto**.

Limiti riscontrati e proposte di sviluppo

Complessità e vincoli temporali

- **Soglia d'ingresso sintattica:** la notazione prefissa richiede un orientamento iniziale non banale
- **Disparità nei tempi di assimilazione:** 10 ore permettono di costruire intuizioni robuste ma non di consolidarle in modo omogeneo per l'intera classe

Proposte per le edizioni future

Consolidamento e trasferibilità

- **Verifiche strutturate:** introduzione di prove ex-ante ed ex-post per quantificare l'efficacia formativa
- **Fase di trasferimento (transfer):** raccordo finale verso linguaggi testuali diffusi (es. Python) per mostrare la generalità dei concetti appresi

Conclusioni

L’informatica come disciplina formativa

- **Rifiuto del riduzionismo pratico:** no all’Informatica intesa come mero addestramento all’uso di applicativi o software commerciali
- **L’aritmetica ricorsiva come "nuovo latino":** una palestra logica disinteressata, rigorosa ed essenziale per il Liceo Matematico
- **Intuzione della nozione di algoritmo:** il passaggio dal "saper fare" esecutivo al "saper far fare" formale offre agli studenti gli strumenti per comprendere davvero le strutture del calcolo

Altri *Giochi di numeri*

- Soddisfacibilità: criptoaritmetica, quadrati magici, sudoku…
- Ottimizzazione discreta: zaino, assegnamento, trasporto…

Giochi di Numeri

Gionata Massi*
IIS "Savoia Benincasa", Ancona

Alberto Cesaretti e Pamela Sanchini
Liceo Scientifico e Musicale "Einstein", Rimini

Grazie per l'attenzione!

Domande?