

tra Problema Il Modello e Soluzione

Fabrizio Marinelli

Università Politecnica delle Marche, Ancona

Gionata Massi*

IIS Savoia Benincasa, Ancona

Piano della Presentazione

1. Piano della Presentazione
2. Contesto
3. Obiettivi
4. Metodologia didattica
 1. Regole del gioco
 2. Successione dei problemi
 3. Fasi didattiche: il Problema dello Zaino
5. Conclusioni...

Contesto

- DM 65/2025
 - Potenziamento delle competenze STEM
 - Linee Guida per le discipline STEM
 - *Utilizzare metodologie attive e collaborative*
 - *Promuovere attività che affrontino questioni e problemi di natura applicativa.*
 - Utilizzare metodologie didattiche per un apprendimento di tipo induttivo.

... promuovere l'integrazione, all'interno dei curricula di tutti i cicli scolastici, di attività, metodologie e contenuti volti a sviluppare le competenze STEM, digitali e di innovazione ...

DM n. 65 del 12 aprile 2023...

- IIS Savoia Benincasa, Ancona
 - IT *Economico*, AFM art. *Sistemi Informativi Aziendali*, Classe V
- Università Politecnica delle Marche
 - Prof. Fabrizio Marinelli

Obiettivi

- Trasversali
 - Integrare le competenze in Informatica con quelle di Matematica ed Economia
 - Motivare lo studio verso le discipline STEM
 - Promuovere attività che affrontino problemi e questioni di natura applicativa
- Disciplinari
 - Astrarre le caratteristiche comuni di un problema decisionale
 - Descrivere formalmente un problema decisionale
 - Scoprire come algoritmi diversi risolvono, con uso diverso delle risorse di calcolo, lo stesso problema
 - Scoprire metodi euristici e/o algoritmi esatti per risolvere problemi
 - Definire lo spazio delle soluzioni
 - Valutare l'efficienza degli algoritmi in termini di tempo di calcolo

Metodologia didattica

Una sintesi di:

- *Lezione segmentata*
- *Problem-Based Learning*
- *Gamification*
- Attenzione ai processi metacognitivi

sviluppata sui problemi decisionali.

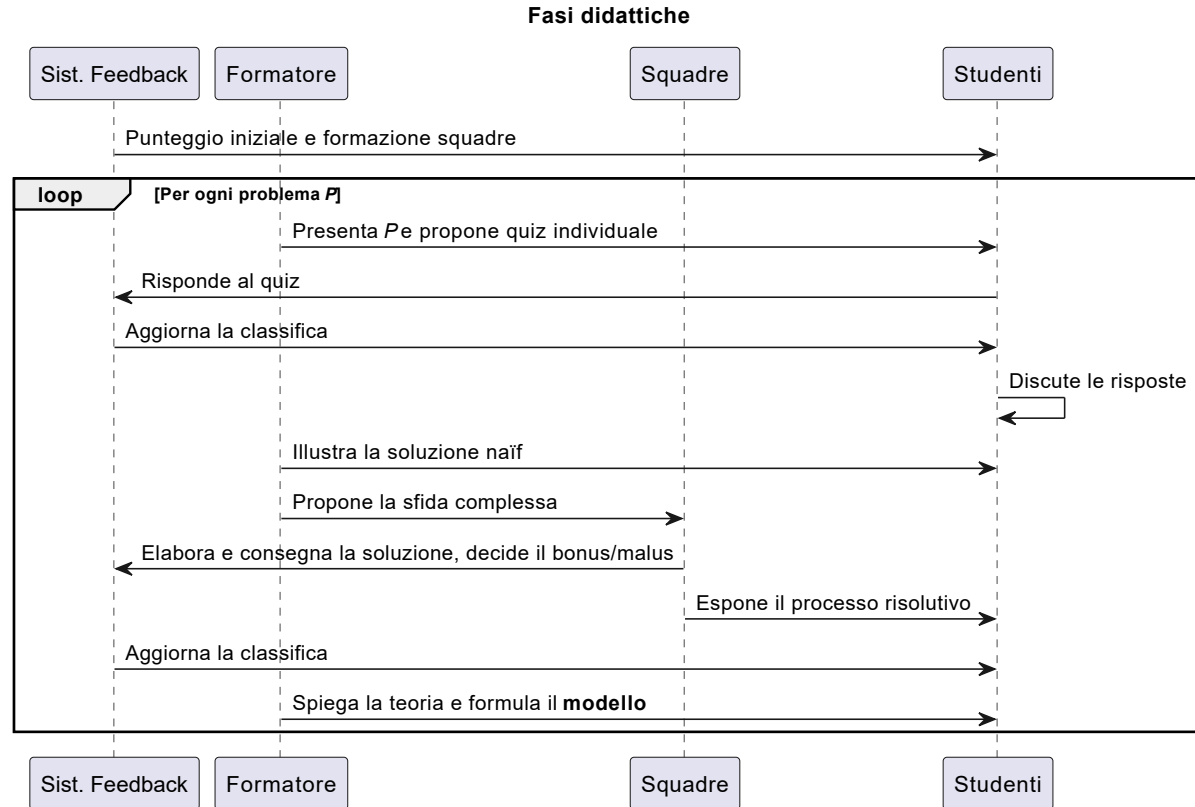
Regole del gioco

Regole del gioco

- Ogni **partecipante** ha in dotazione **1000** dobloni
- I partecipanti sono raggruppati in **squadre**
- Ogni partecipante **guadagna** dobloni rispondendo a **domande**
- Ogni squadra partecipa a **gare scommettendo** da 10 a 200 dobloni



Un gioco serio!



Successione dei problemi

- Problema dello zaino
- Problema del rettangolo isoperimetrico di area massima
- Problema dello zaino (seconda iterazione)
- Problema del mix ottimo di produzione
- Problema della dieta di costo minimo

Fasi didattiche: il Problema dello Zaino



Il bagaglio pesa troppo e all'aeroporto non voglio pagare la sovrattassa.

... devo togliere qualche oggetto

Se ogni oggetto ha un valore, quali abbandono all'aeroporto e quali invece conservo in valigia ?

... chiaramente voglio conservare in valigia il massimo valore complessivo possibile

Problema dello Zaino - Sfida individuale



Limite di peso: 6 kg



peso: 5.2 kg
valore: 100



peso: 2.3 kg
valore: 60



peso: 3.5 kg
valore: 70



peso: 1.5 kg
valore: 15



Problema dello Zaino - Soluzione naïf

Approccio
procedurale

Scopo: descrivere *come* calcolare una soluzione

per garantire l'ottimalità è necessaria una procedura che esamina
sistematicamente *tutte le possibili soluzioni*

... occorre selezionare gli oggetti da
mettere in valigia...

... una potenziale soluzione quindi è
un generico sottoinsieme di oggetti
...



Ma quanti sono i possibili sottoinsiemi?



Problema dello Zaino - Spazio delle soluzioni



Elenco i sottoinsiemi considerando, in sequenza, la possibile scelta di ogni oggetto

			
			
			 
			 
		 	 
			  
			 
		 	 
	 	 	  
		  	  
			   
2	4	8	16

Problema dello Zaino - Sfida di gruppo

Gara 1: l'emulo di Jeff Bezos

- capacità del furgone: 153 Kg
- 50 oggetti



oggetto	valore	peso	oggetto	valore	peso
1	1	2	26	45	38
2	2	4	27	47	39
3	3	6	28	48	40
4	7	7	29	49	41
5	10	9	30	50	42
6	15	10	31	51	43
7	16	12	32	52	44
8	17	13	33	53	46
9	19	14	34	54	47
10	21	16	35	55	48
11	22	17	36	56	49
12	23	19	37	58	50
13	25	20	38	59	51
14	27	22	39	60	53
15	28	23	40	62	54
16	30	24	41	63	55
17	31	25	42	64	57
18	33	28	43	66	58
19	34	29	44	67	59
20	36	30	45	68	60
21	38	32	46	69	62
22	39	33	47	70	63
23	41	35	48	72	64
24	42	36	49	73	65
25	43	37	50	75	67

Problema dello Zaino - Discussione

Alcune strategie



limite sul peso: priorità
agli oggetti leggeri



obiettivo sul valore:
priorità agli oggetti di
maggior valore

Osserviamo che:

- tra due oggetti di pari peso conviene scegliere quello che vale di più
- tra due oggetti di pari valore conviene scegliere quello che pesa meno



in entrambi i casi, gli oggetti promettenti sono

quelli con alto **valore specifico** = $\frac{\text{valore}}{\text{peso}}$

Problema dello Zaino - Verso il modello

Approccio
dichiarativo

Scopo: descrivere *cosa* calcolare

- La soluzione del problema è un *sottoinsieme di oggetti*.
- Un sottoinsieme è il risultato di una *serie di decisioni* (inserisco o non inserisco ognuno degli oggetti)
- ...quindi le *decisioni* prese descrivono la *soluzione*.
- Come rappresento matematicamente le decisioni da prendere?

Quali sono le *variabili decisionali*?



Problema dello Zaino - Il modello

... in generale

- n oggetti, ognuno descritto da un valore v_i e da un peso p_i
- una valigia con limite di peso pari a b

$$\max(v_1x_1 + \dots + v_nx_n)$$

$$p_1x_1 + \dots + p_nx_n \leq b$$

$$x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$$

$$\max \sum_{i=1}^n v_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq b$$

$$x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$$



Problema dello zaino - Concetti chiave

- Astrazione
- Rappresentazione
 - del problema -> MODELLO
 - codifica dell'istanza
 - codifica e spazio delle soluzioni
- Algoritmi
 - esatti (enumerazione totale)
 - euristici (greedy)
 - complessità temporale: crescita esponenziale
- Linguaggi
 - Programmazione Lineare Intera (PLI)
 - A Mathematical Programming Language (AMPL)

Conclusioni...

- Didattica disciplinare
 - Tutto quanto sopra!
 - Dal problema alla soluzione tramite la costruzione del Modello
 - Risoluzione di problemi reali
- Metodologia didattica
 - Attiva, efficace e motivante
 - Attivazione processi metacognitivi
- Estendibilità ad altri ambiti
 - programmazione
 - basi di dati
 - ingegneria del software

...e sviluppi futuri

- Revisione delle tecniche di gamification e versione online del sistema di gamification
- Repliche del corso, anche in altri indirizzi, esteso a problemi formulati su grafi
- Monitoraggio dell'efficacia didattica con raccolta di dati per analisi e miglioramenti

tra Problema Il Modello e Soluzione

Fabrizio Marinelli

Università Politecnica delle Marche, Ancona

Gionata Massi*

IIS Savoia Benincasa, Ancona

Grazie per l'attenzione!
Domande?

Problema dello Zaino - Discussione - 2

- **197** è il meglio che si possa fare?
- Se così non è, qual è una stima ragionevole dell'errore che si commette?

Per rispondere a queste domande ci serve un po' di...

Matematica



Problema dello Zaino - Spiegazione e MODELLO - 1

... e se invece gli oggetti sono 100?

...le possibili “soluzioni” sono $2^{100} = 2^{10 \cdot 10} \approx 1000^{10} = 10^{30}$

ovvero, esattamente

1.267.650.600.228.229.401.496.703.205.376

con il super-computer di prima, ci servirebbero circa 10^{15} secondi,
cioè circa 32.000.000 anni



Problema dello Zaino - Spiegazione e MODELLO - 3

variabili decisionali

x_i = valore che si ottiene se si seleziona l' i -esimo oggetto

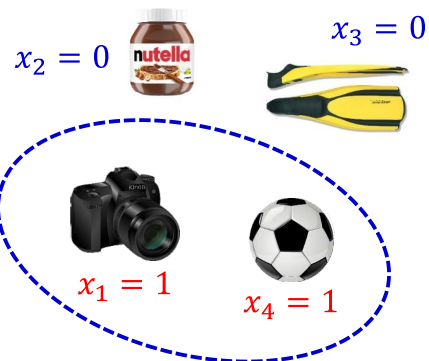
$x_i = 1$ se l'oggetto i -esimo è selezionato, 0 altrimenti

x = numero di oggetti selezionati

$x_i = 1$ se selezionando l'oggetto i -esimo si supera il limite, 0 altrimenti

Problema dello Zaino - Spiegazione e MODELLO - 4

	peso: 5.2 kg valore: 100	$x_1 \in \{0,1\}$
	peso: 2.3 kg valore: 60	$x_2 \in \{0,1\}$
	peso: 3.5 kg valore: 70	$x_3 \in \{0,1\}$
	peso: 1.5 kg valore: 15	$x_4 \in \{0,1\}$



quanto pesa questo insieme?

$$\begin{aligned} 6.7 &= 5.2 + 1.5 \\ &= 5.2x_1 + 2.3x_2 + 3.5x_3 + 1.5x_4 \end{aligned}$$

quanto vale questo insieme?

$$\begin{aligned} 115 &= 100 + 15 \\ &= 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 \end{aligned}$$

Problema dello Zaino - Spiegazione e MODELLO - 5

	peso: 5.2 kg valore: 100	$x_1 \in \{0,1\}$
	peso: 2.3 kg valore: 60	$x_2 \in \{0,1\}$
	peso: 3.5 kg valore: 70	$x_3 \in \{0,1\}$
	peso: 1.5 kg valore: 15	$x_4 \in \{0,1\}$

Vincolo:

il peso complessivo non può superare 6 kg

$$5.2x_1 + 2.3x_2 + 3.5x_3 + 1.5x_4 \leq 6$$

Obiettivo:

massimizzare il valore degli oggetti in valigia

$$\max(100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4)$$

Problema dello Zaino - Spiegazione e MODELLO - 6

	peso: 5.2 kg valore: 100	$x_1 \in \{0,1\}$
	peso: 2.3 kg valore: 60	$x_2 \in \{0,1\}$
	peso: 3.5 kg valore: 70	$x_3 \in \{0,1\}$
	peso: 1.5 kg valore: 15	$x_4 \in \{0,1\}$

modello di programmazione matematica

$$\max(100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4)$$

$$5.2x_1 + 2.3x_2 + 3.5x_3 + 1.5x_4 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$$

Rettangolo isoperimetrico

[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze di base l e altezza h che massimizzano la sua area A ?

Approccio dichiarativo

Scopo: descrivere *cosa* calcolare

si definisce un **modello** che descrive *cosa* calcolare, ossia le *relazioni* esistenti tra i dati del problema (perimetro) e quelli della soluzione (lunghezza dei lati e area del rettangolo).

Un modello che **descrive** una soluzione:

variabili

- l = base
- h = altezza
- A = area

max A

$$\begin{cases} 2l + 2h = 100 \\ A = l \cdot h \\ l \geq 0, h \geq 0 \end{cases}$$

mi interessa il rettangolo di area massima

il perimetro del rettangolo è 100

l'area è data dal prodotto di base e altezza

base e altezza sono numeri non negativi

...sì, ma la « soluzione » ?

Rettangolo isoperimetrico - Concetti chiave

- Astrazione
- Rappresentazione
 - del problema -> MODELLO
 - discretizzazione spazio delle soluzioni
 - codifica dell'istanza discretizzata
 - codifica delle soluzioni e simmetria
- Algoritmi
 - simulazione: iterazione con ricerca del massimo
 - soluzione algebrica (cond. primo e secondo ordine derivate)
- Linguaggi
 - A Mathematical Programming Language (AMPL)

Mix ottimo di produzione

La fabbrica del cioccolato



[Problema] La *fabbrica del cioccolato* produce due tipi di creme (che per semplicità chiamiamo **A** e **B**) che vende rispettivamente a **25** e **28** €/Kg. Considerando la composizione delle singole creme e le disponibilità in magazzino degli ingredienti (vedi tabella) qual è il massimo guadagno che si può ottenere producendo **A** e **B**?



	composizione			
	latte	cioccolato	zucchero	burro
crema A	40%	40%	10%	10%
crema B	24%	45%	31%	-
disponibilità (Kg)	312	360	160	70

Problema della dieta

Il problema della dieta

	Latte intero	Mela	Pasta all'uovo	Gamberetti	Lattuga	Petto di Pollo	Pomodori	Tiramisù	Fabbisogno
Proteine (g)	3,3	0,2	11,8	13	1,8	22,2	1,2	13,2	≥ 450
Zuccheri (g)	4,9	11	63,2	0	2,2	0	2,8	33,5	≥ 750
Grassi (g)	3,4	0,3	2,8	1	0,4	0,9	0,2	25,8	≤ 300
Colesterolo (mg)	14	0	91	178	0	67	0	197	≤ 250
calorie	61	54	250	93	29	99	35	300	

Vincoli : la quantità totale di grassi non può eccedere la soglia di 300 g:

$$3.4 x_1 + 0.3 x_2 + \dots + 25.8 x_8 \leq 300$$

grassi assimilati con x_1
porzioni di Latte intero

grassi assimilati con x_2
porzioni di Mela

Soglia massima
di grassi

Problema della dieta - Concetti chiave

- Astrazione
- Rappresentazione
 - del problema -> MODELLO
- Algoritmi
 - algoritmi greedy
 - cenni al metodo del simplesso
- Linguaggi
 - A Mathematical Programming Language (AMPL)